

Zur didaktischen Grundlegung und Konzeption der Portfolioarbeit im fächerübergreifenden Mathematikunterricht am Oberstufen-Kolleg

Eine erfahrungsgesättigte Dokumentation
für Lehrkräfte zum „Nacherfinden“

Angela Kemper^{1,*}

¹ Versuchsschule Oberstufen-Kolleg

* Kontakt: Versuchsschule Oberstufen-Kolleg,
Universitätsstr. 23, 33615 Bielefeld
angela.kemper@uni-bielefeld.de

Zusammenfassung: Die strukturanalytischen Methoden der Mathematik bieten für den Unterricht in der Oberstufe die Möglichkeit zu einem interessanten und ungewöhnlichen Fächerübergreif zu *Kunst* und *Philosophie*. Die Analyse hochsymmetrischer Strukturen ergänzt und kontrastiert die Sicht auf das Thema *Symmetrie* in Kunstgeschichte und Philosophie. In diesem Beitrag soll die Arbeit im Unterricht mit einem Kursportfolio konkret vorgestellt werden, das sich in inhaltlicher (fächerübergreifendes Thema Symmetrie) und formaler Hinsicht (hoher Anteil an reflexivem Arbeiten) von klassischem Lehrgangsunterricht mit Übungsaufgaben in der Mathematik deutlich unterscheidet. Das Kursportfolio wurde in einer Kurssequenz mit dem Titel *Faszination der Symmetrie* am Oberstufen-Kolleg im Grundkurs Mathematik in der Jahrgangsstufe 12 im Rahmen eines fächerübergreifenden Profils entwickelt und langjährig erprobt. Hier anhand eines speziellen Inhalts ausbuchstabiert, versteht sich dieser Beitrag jedoch auch als eine generelle Anregung für ein portfoliogestütztes Lernen im Mathematikunterricht der Oberstufe. Das Konzept ist geeignet, ebenso für andere mathematische Themenbereiche adaptiert zu werden und damit einen Reformimpuls zur Förderung des selbstständigen Lernens und der fachlichen und fächerübergreifenden Kompetenzen der Lernenden zu setzen.

Schlagwörter: fächerübergreifende Kompetenzen; Portfolioarbeit; Eckpunktepapier zur Weiterentwicklung der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen; fächerübergreifender Mathematikunterricht; Symmetriegruppen



English Information

Title: On the Didactic Foundation and Conception of Portfolio Work in Interdisciplinary Mathematics Lessons at the Oberstufen-Kolleg. An Experience-Saturated Documentation for Teachers to “Reinvent”

Abstract: The structure-analytical methods of mathematics offer the possibility of an interesting and unusual cross-over to Arts and Philosophy teaching in upper secondary schools. Analysing highly symmetrical structures complements and contrasts the view of symmetry in Art History and Philosophy. In this article, the work in the classroom with a course portfolio will be presented, which differs significantly in terms of content (interdisciplinary topic of symmetry) and form (high proportion of reflective work) from traditional classroom teaching with exercises in mathematics. The course portfolio was developed and tested over many years in a course sequence with the title *Fascination of Symmetry* at the experimental school Oberstufen-Kolleg in the basic Mathematics course in year 12 as part of an interdisciplinary profile. However, this article is also intended as a general suggestion for portfolio-supported learning in Mathematics lessons in the sixth form. The concept can also be adapted for other mathematical subject areas and thus provide an impetus for reform to promote both independent learning and the subject-specific and interdisciplinary competences of learners.

Keywords: interdisciplinary skills; portfolio work; key issues paper on the further development of the upper secondary school in North Rhine-Westphalia; interdisciplinary Mathematics teaching; symmetry groups

Einleitung: Worum geht es?

Die hier beschriebene Portfolioarbeit bezieht sich auf einen Mathematikunterricht im fächerübergreifenden Grundkurs am Oberstufen-Kolleg Bielefeld. Damit wird diese Arbeitsweise nicht eins zu eins in den Mathematikunterricht eines rein fachlichen Grundkurses zu übernehmen sein. Das heißt aber nicht, dass nicht Teile daraus für Sie interessant sein können. Ich lade Sie ein, die folgenden Ausführungen wie einen Steinbruch zu benutzen, in dem Sie für Ihren Unterricht hoffentlich einzelne brauchbare Dinge finden und anderes links liegen lassen können.

Ich werde im Folgenden begründen, warum ich in der Portfolioarbeit erstens für alle Lernenden einen großen Mehrwert zur Vorbereitung auf eine Abiturprüfung – insbesondere die mündliche Portfolioprüfung – im fachlichen Schwerpunkt Mathematik¹ sehe.² Zweitens werde ich von der Erfahrung berichten, dass die selbstständige Arbeit mit einem Portfolio ganz neue Zugänge zur Mathematik für eine bestimmte Gruppe schaffen kann, nämlich diejenigen, die ich die „Mathe-Traumatisierten“ nenne – und die, wie ich weiß, in Mathematik-Grundkursen jeglicher Oberstufe nicht selten anzutreffen sind. Insbesondere, wer einerseits „sprachaffin“ ist, aber andererseits im Fach Mathematik schon lange jegliches Selbstbewusstsein verloren hatte, kann hier profitieren.

¹ Am Oberstufen-Kolleg müssen die Kollegiat*innen in der Abiturprüfung – wie an jeder anderen Oberstufe – zeigen, dass sie bestimmte mathematische Kompetenzen erworben haben. Während in den Studienfächern die Klausuren unter den Bedingungen des Zentralabiturs geschrieben werden, ist es aufgrund des Konzepts der fächerübergreifenden Grundkurse in diesen anders: Die schriftlichen Abiturprüfungen sind gleichwertig, aber nicht gleichartig zu den zentral gestellten Grundkursklausuren. Die schriftlichen Prüfungsvorschläge werden von den Lehrenden eingereicht und von der Bezirksregierung auf ihre Gleichwertigkeit hin geprüft. Die mündliche Grundkursprüfung am Oberstufen-Kolleg (die sogenannte Portfolioprüfung) ist eine Präsentationsprüfung und prüft explizit auch die Reflexionskompetenz der Prüflinge.

² Vergleiche auch die *Eckpunkte für die Weiterentwicklung der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen* (2024).

Ich werde in Kapitel 1 das Konzept der fächerübergreifenden Themenprofile am Oberstufen-Kolleg kurz vorstellen. Fachliche Zusammensetzung und inhaltliches Konzept des Profils „schönes machen – schönes denken“ werden in Kapitel 2 beschrieben.

Wer nicht zuallererst an dem Konzept des fächerübergreifenden Unterrichts interessiert ist, kann direkt zu Kapitel 3 springen. Hier wird das Curriculum der Kurssequenz „Faszination der Symmetrie“ vorgestellt. Bevor es um die konkrete Arbeit mit dem Portfolio geht (Kap. 4), wird zu klären sein, was ich unter einem Kurs-Portfolio verstehe. Kapitel 5 beschreibt die didaktischen Überlegungen zur Portfolioarbeit. Zu guter Letzt ziehe ich unter dem Punkt „Gelungenes und Schwieriges“ Bilanz aus meinen Erfahrungen (Kap. 6).

1 Idee und Praxis der themenorientierten Profile am Oberstufen-Kolleg³

Die im Wintersemester 2011/2012 erstmals angebotenen Profile stehen in der langen Tradition des fächerübergreifenden Unterrichts am Oberstufen-Kolleg. In den Profilen arbeiten jeweils drei vierstündige Grundkurse aus verschiedenen Fächern zu einem Thema zusammen. Dahinter liegt die Idee, dass die zentralen Probleme unserer Welt nur aus der Perspektive mehrerer Fachrichtungen verstanden und gelöst werden können. Die Arbeit im Profil gibt die Gelegenheit, vernetzt zu denken und über den fachlichen Tellerand zu schauen.

Der Unterricht in den beteiligten Kursen will Aha- Erlebnisse anregen, den Perspektivenwechsel zwischen der Sichtweise von Laien und der von Expert*innen⁴ ermöglichen, die interdisziplinäre Zusammenarbeit verschiedener Fachrichtungen konkret und lebendig realisieren und dadurch den Unterricht spannender und interessanter machen, als reiner Fachunterricht das könnte.

Diese Form des Fächerverbundes schafft die Möglichkeit, die fächerübergreifenden Kompetenzen (weiter) zu entwickeln und auf ein wissenschaftliches Studium vorzubereiten.

Insgesamt sind bisher am Oberstufen-Kolleg elf Profile entwickelt worden.⁵

Zur Theorie der fächerübergreifenden Kompetenzen

Wissenschaftspropädeutik ist ein wichtiges didaktisches Prinzip der gymnasialen Oberstufe. Hahn (2008) definiert sie als die Befähigung zum „kompetenten Umgang mit Fachperspektiven“. Er unterscheidet dabei drei fächerübergreifende Kompetenzen:

- Reflexionskompetenz meint die Fähigkeit, zwischen verschiedenen Fachperspektiven und ihren Möglichkeiten und Grenzen zu unterscheiden.
- Urteilskompetenz meint die Fähigkeit, einen begründeten Standpunkt zu einem Problem einzunehmen und Fachwissen und fachwissenschaftliche Methoden zur Analyse und Bearbeitung von Problemen nutzen zu können.

³ Vgl. zum Konzept der Profile am Oberstufen-Kolleg den Beitrag von Keymer et al., S. 28–39 in diesem Band.

⁴ In den Kursen kommen Kollegiat*innen aus unterschiedliche Studienfächern (entspricht in etwa den Leistungskursen) zusammen, z.B. Kunst oder Biologie oder Philosophie, die jeweils unterschiedliches Fachwissen in das fächerübergreifende Thema Symmetrie einbringen und über Peer-Learning Anderen weitergeben können.

⁵ Die Themen und Fächerzusammensetzung der sieben im Moment unterrichteten Profile sind: „Tomorrowland – Wie wollen wir leben?“ (Biologie – Englisch – Theologie / Ethik) / „Arbeit und Leben – was kostet die Welt?“ (Mathematik – Wirtschaft – Philosophie) / „Menschenbilder – Weltbilder“ (Literatur – Biologie – Philosophie) / „GenderBilder“ (Politische Bildung – Literatur – Sport) / „One World“ (Englisch – NaWi – Soziologie) / „Mit Kopf, Herz und Hand“ (Literatur – Pädagogik – Biologie) / NaMeS Nature Me Society (NaWi – Politik – Sport).

- Unter Verständigungskompetenz verstehen wir die Fähigkeit, zwischen der Perspektive der Fachexpert*innen und der Perspektive der Laien zu unterscheiden und Expert*innenwissen an Laien kommunizieren zu können.

Die drei fächerübergreifenden Kompetenzen seien hier nur kurz genannt. Zum theoretischen Konzept der wissenschaftspropädeutischen Kompetenzbereiche siehe den bereits erwähnten ausführlichen Artikel von Stefan Hahn im Band *Was braucht die Oberstufe* (2008, S. 157–168).

2 Das Profil „schönes machen – schönes denken“ – Idee und Fächerzusammensetzung

Der Titel dieses Profils ist bewusst klein geschrieben. Er kann in zweierlei Weisen gelesen werden: Schönes machen – Schönes denken *oder* schönes Machen – schönes Denken.

Die beteiligten fachlichen Schwerpunkte dieses Profils sind im Jahrgang 12 Kunstpraxis, Mathematik und Philosophie, im Jahrgang 13 Kunstgeschichte und Mathematik.

Zur inhaltlichen Idee des Profils hier ein Auszug aus der Profilsbroschüre für die Kollegiat*innen:⁶

„Profil 3: schönes machen – schönes denken

Aber was ist schön? Schönheit, Harmonie, Balance, Symmetrie – gibt es das überhaupt?

Und was wäre es dann, ‚das Schöne‘, ‚das Harmonische‘, ‚das Ebenmäßige‘? Wir könnten es wohl kaum erkennen, ohne uns mit dem Hässlichen, dem Unharmonischen, dem Asymmetrischen zu beschäftigen. Und gibt es auch ‚hässlich Schönes‘ bzw. ‚schön Hässliches‘ – eine Ästhetik des Hässlichen?

Der Titel des Profils ‚schönes machen, schönes denken‘ fasst alles zusammen, was Euch die Fächer Kunst, Mathematik und Philosophie anbieten: Einerseits sollte es eigene Produktion des Schönen geben (Schönes machen), andererseits sollte das Schöne auf seine Kategorien, Ursprünge und Bezüge untersucht werden (Schönes denken). Gleichzeitig könnte auch noch das Machen und das Denken selbst ‚schön‘ ablaufen: geistreich, sorgfältig, systematisch, kreativ, geordnet, logisch, material-, werk- und fachgerecht oder zufällig, chaotisch ...

Künstler*innen, Philosoph*innen und Mathematiker*innen (ja, richtig gelesen, auch die!) haben versucht Schönes zu verwirklichen, es zu befragen, sie haben darüber geschrieben, dazu geforscht, Theorien aufgestellt und sie haben uns vielfältige Antworten auf die obigen Fragen vorgeschlagen, je nach der Perspektive ihrer Zeit, ihres Fachs, ihres Lebens.“

3 Die Mathematiksequenz in 12.1 und 12.2: „Faszination der Symmetrie“ – Kurze Darstellung des Curriculums anhand von Kompetenzleitfäden

Fächerübergreifende Mathematikurse zum Thema Symmetrie gibt es am Oberstufenkolleg schon seit über 20 Jahren, lange bevor es den Fächerverbund in den Profilen gab. Für fächerübergreifendes Arbeiten eignet sich das Thema Symmetrie aufgrund seiner Bedeutung in der (Wissenschafts-)Geschichte auf eine ganz spezifische Art und Weise, insbesondere in der Kombination mit den anderen fachlichen Schwerpunkten des Profils: Kunst und Philosophie und unter dem Titel „schönes machen – schönes denken“. Der Mathematiker Andreas Dress schreibt in seinem Aufsatz „Repetition und Metamorphose“:

„Strukturen von hoher Symmetrie haben seit eh und je mathematisches Denken in besonderer Weise angeregt und herausfordert. Bereits die vermutlich älteste überlieferte mathe-

⁶ Die Schüler*innen heißen am Oberstufen-Kolleg Kollegiat*innen.

matische Theorie hat ein Symmetriephänomen zum Thema. Es ist die im Kreise der Pythagoräer (um 500 vor Christus) entwickelte Theorie der fünf vollkommenen oder, wie sie später auch genannt wurden, platonischen Körper. Sie beschäftigt sich mit der geometrischen Struktur solcher Körper, genauer solcher Polyeder, die, ähnlich wie der Würfel, ‚überall gleich‘ aussehen. Die Theorie gipfelt in der wohl auf Theaitetos (415–369 v.Chr.) zurückgehenden vollständigen Aufzählung aller solcher Körper und somit insbesondere in der Erkenntnis, dass es nur fünf verschiedene solche Körper gibt, und sie liefert darüber hinaus eine ausführliche Beschreibung der zwischen diesen Körpern, ihren Ecken, Kanten und Flächen sowie ihren Winkeln, Flächen- und Kantenmittelpunkten etc. bestehenden Beziehungen.

Seit ihrer Entdeckung, die, wie wir heute wissen, bereits in vorgeschichtlicher Zeit erfolgte, sind diese fünf vollkommenen Körper ein schier unerschöpflicher Quell mathematischer, philosophischer und oft auch mystischer Inspiration gewesen.“ (Dress, 1986, S. 83)

Für die Kollegiat*innen wird die Idee der Kurssequenz in der Kursankündigung wie folgt beschrieben:

„Die Kurssequenz wird das Phänomen Symmetrie aus dem Blickwinkel verschiedener Disziplinen beleuchten: Mathematik – Kunst – Musik – Biologie – Chemie – Psychologie. Einen zentralen Stellenwert in dieser Kurssequenz wird die Beschäftigung mit der *mathematischen Beschreibung* des Phänomens Symmetrie einnehmen. Beide Kurse sind fächerübergreifend, aber mit einem stark mathematischen Anteil angelegt und möchten Euch die ästhetische, die *schöne* Seite der Mathematik nahebringen. Der Zusammenhang zum Profilthema ‚schönes machen – schönes denken‘ wird immer wieder reflektiert werden, ebenso werden Bezüge zu den anderen fachlichen Schwerpunkten Philosophie und Kunst hergestellt.“

Das Curriculum der beiden Kurse soll hier anhand der Kompetenzleitfäden zu den beiden Kursen dokumentiert werden. Sie sind hier nicht redaktionell überarbeitet, sondern wurden den Kollegiat*innen jeweils zu Beginn des Kurshalbjahres genau in dieser Form ausgehändigt und blieben für die Lernenden auf der Lernplattform Logineo NRW LMS bis zur Abiturprüfung jederzeit aufrufbar. Im Laufe des Kurses wurde immer wieder Bilanz gezogen, welche Kompetenzen dieses Leitfadens eigentlich schon erworben sein sollten.

Kurs: Faszination der Symmetrie I (12.1)

Kompetenzleitfaden Symmetrie I: *Was ich am Ende des Kurses kann ...*

1. mit eigenen Worten **beschreiben**, was **Symmetrie** bedeutet,
2. den Begriff der **Decktransformationen** mit eigenen Worten **beschreiben**,
3. viele **Beispiele** für Decktransformationen **anführen** und **erklären**,
4. mögliche **Decktransformationen** bei vorgegebenen Mustern / Ornamenten **erkennen**,
5. den Begriff der **Symmetriegruppe** mit eigenen Worten **beschreiben**,
6. viele **Beispiele** für Symmetriegruppen **benennen** und **formal richtig aufschreiben**,
7. **Diedergruppen** und **Zyklische Gruppen** **erkennen** und **unterscheiden**,
8. ein **Muster / Ornament** mit einer bestimmten Symmetrie(-gruppe) **entwerfen** und **zeichnen**,
9. mit eigenen Worten **beschreiben**, was eine (**mathematische**) **Gruppe** ist,
10. die vier **Gruppenaxiome** **verbalisieren** und **formal aufschreiben**,
11. die vier **Gruppenaxiome** bei einem Beispiel **nachprüfen**,
12. **beschreiben**, was eine **kommutative Gruppe** ist,
13. bei einer beliebigen Menge mit einer beliebigen Verknüpfung anhand der **Verknüpfungstabelle prüfen**, ob es sich dabei um eine Gruppe handelt,
14. einige **Zahlengruppen erkennen** und auf Gruppeneigenschaften **überprüfen**,

15. **Verknüpfungstabellen** für endliche Symmetriegruppen **aufstellen**,
16. **Verknüpfungstabellen** für andere endliche Gruppen **aufstellen**, deren Verknüpfung bekannt ist,
17. die **Beweisidee** für das **Sudoku-Prinzip** bei Verknüpfungstabellen verstehen und nachvollziehen,
18. die Restklassengruppen $\mathbf{R}_{\text{mod } n}$ **formal richtig aufschreiben**, ihre Verknüpfung **verstehen** und die Gruppeneigenschaft **prüfen**,
19. **definieren**, was ein **Gruppenisomorphismus** ist, und **nachweisen**, ob zwei Gruppen **isomorph** sind,
20. **nachweisen**, dass zum Beispiel $\mathbf{R}_{\text{mod } 4}$ **isomorph** zu \mathbf{C}_4 ist,
21. die **Permutationsgruppe** \mathbf{P}_3 **aufschreiben** und eine Verknüpfungstabelle erstellen,
22. **nachweisen**, dass \mathbf{P}_3 und \mathbf{D}_3 isomorph sind, und den **Isomorphismus explizit angeben**,
23. **argumentieren**, warum \mathbf{P}_4 und \mathbf{D}_4 nicht isomorph sein können,
24. eines der **speziellen interdisziplinären Themen** ausarbeiten und dem Kurs in einem Referat **präsentieren**, den Zusammenhang zum Kursthema / ProfiltHEMA **deutlich machen**.⁷

Kurs: Faszination der Symmetrie II (12.2)

Kompetenzleitfaden Symmetrie II: *Was ich am Ende des Kurses kann ...*

1. die **sieben** verschiedenen **Bandornamentgruppen** erkennen, unterscheiden und formal richtig aufschreiben,
2. ein **Muster / Ornament** zu einer bestimmten Bandornamentgruppe **entwerfen** und **zeichnen**,
3. die **kristallographische Bezeichnungsweise** der Bandornamentgruppen nach der *International Union of Crystallography*, kurz IUCr, **kennen** und **zuordnen können**,
4. die **siebzehn** verschiedenen **Ornamentgruppen** (Wallpaper-Groups) erkennen, unterscheiden und formal richtig aufschreiben,
5. ein **Muster / Ornament** zu einer bestimmten Ornamentgruppe **entwerfen** und **zeichnen**,
6. die **kristallographische Bezeichnungsweise** der Wallpapergroups nach der *International Union of Crystallography*, kurz IUCr, **kennen** und **zuordnen können**,
7. mithilfe eines **Flussdiagramms** ein Muster / Ornament einer der 17 Ornamentgruppen **zuordnen**
8. die Definition des **Vektors** sprachlich **verbalisieren**, **geometrisch erklären** und **formal aufschreiben**,
9. **Vektoren** im \mathbf{IR}^2 und im \mathbf{IR}^3 in **Komponentendarstellung** aufschreiben,

⁷ Die fächerübergreifenden Themen, zu denen es Material auf der Lernplattform gibt sind: (1) Fibonaccizahlen und Goldener Schnitt, (2) Stereoisomerie: Chiralität von Molekülen, (3) Das magische Auge: Autostereogramme, (4) Mineralien und Kristalle, (5) Platonische und andere regelmäßige Körper, (6) Selbstähnlichkeit: Fraktale, (7) Quintenzirkel & Pythagoreisches Komma, (8) Gestaltwahrnehmung – Gestaltungsgesetze, (9) Quasikristalle, (10) Origami: Japanische Falte Kunst – auch in der Wissenschaft, (11) Arabische Ornamentik.

Zu allen diesen Themen gibt es auf der Lernplattform umfangreiches Materialien, die immer auch einen Bezug zu mathematischen Herangehensweisen herstellen. Die Themen sind unterschiedlich komplex und bieten die Möglichkeit sowohl zur inneren Differenzierung je nach Interesse und Vorkenntnissen der Kollegiat*innen (zum Beispiel aus ihren Studienfächern). Die Referate waren in der Regel Partnerarbeiten.

10. **Vektoren addieren** und **mit einer Zahl** (einem Skalar) **multiplizieren** und **Linearkombinationen** von verschiedenen Vektoren **berechnen**,
11. **Linearkombinationen** von Vektoren im \mathbb{R}^2 zeichnen,
12. den Begriff der **Linearen Abhängigkeit** / **Unabhängigkeit** eines Systems von Vektoren im \mathbb{R}^2 (und im \mathbb{R}^3) kennen und **Lineare Abhängigkeit** rechnerisch nachweisen,
13. **geometrisch deuten**, was es heißt, wenn zwei, (drei) Vektoren im \mathbb{R}^2 **linear abhängig** / **unabhängig** sind,
14. **zeichnerisch** und **rechnerisch aufzeigen**, wie sich jeder **beliebige Vektor** im \mathbb{R}^2 durch eine **Linearkombination von zwei linear unabhängigen Vektoren** darstellen lässt,
15. die Definition von **Sinus** und **Kosinus** am rechtwinkligen Dreieck und am **Einheitskreis** verstehen,
16. **Sinus** und **Kosinus** als Funktionen verstehen und ihre jeweiligen **Graphen zeichnen**,
17. den Unterschied von **Winkelmaß** und **Bogenmaß** verstehen und das eine in das andere **umrechnen**,
18. die **Komponenten** eines **Einheitsvektors** im \mathbb{R}^2 mit Sinus- und Kosinus-Werten berechnen,
19. verstehen und verbalisieren, was eine **Matrix** ist, und **zwei Matrizen** miteinander **multiplizieren**,
20. zu einer Drehung im \mathbb{R}^2 die passende **Drehmatrix** und zu einer Spiegelung die passende **Spiegelmatrix** aufstellen,
21. die aus dem ersten Semester bekannten Symmetriegruppen in **Matrizendarstellung** aufschreiben.

EXKURS

Bezüge zum Kernlehrplan Mathematik des Landes Nordrhein-Westfalen (KLP):
Hier soll kurz dargestellt werden, inwieweit sich die Anforderungen aus dem Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen für das Fach Mathematik in der Portfolioarbeit widerspiegeln.

Der nordrhein-westfälische KLP Mathematik unterscheidet *Kompetenzbereiche*, die sich auf die Prozesse, und *Inhaltsfelder*, die sich auf die Gegenstände beziehen. Die *Kompetenzerwartungen* werden als die Zusammenführung von Prozessen und Gegenständen formuliert (vgl. MSB NRW, 2023, S. 12).

Kompetenzbereiche

Es werden die fünf *Kompetenzbereiche* Operieren, Modellieren, Problemlösen, Argumentieren und Kommunizieren unterschieden. Alle fünf dieser prozessorientierten Kompetenzbereiche finden sich in der Portfolioarbeit wieder. Exemplarisch soll hier eingegangen werden auf die letzten beiden, weil die Fähigkeiten zum mathematisch fachlichen und überfachlichen Argumentieren und zum Kommunizieren nicht nur explizit in der Aufgabenstellung gefordert werden, sondern auch für die Bewertung des Portfolios eine hohe Gewichtung erfahren.

Argumentieren: „Das mathematische Argumentieren umfasst das *Vermuten* von mathematischen Zusammenhängen, das *Begründen* der erkannten Zusammenhänge durch Rückgriff auf Bekanntes und durch die Regeln des mathematischen Schlussfolgerns und Beweisens sowie das *Beurteilen* von Argumentationen.“ (MSB NRW, 2023, S. 14; Hervorh. i.O.)

Kommunizieren: „Mathematisches Kommunizieren beinhaltet die adressaten- und sachgerechte Versprachlichung mathematischer Sachverhalte, Problemdarstellungen und Lösungsideen. [...] Für die Mathematik sind neben der verbalen Darstellung insbesondere die ikonische und die symbolische Darstellung von zentraler Bedeutung. Mathematisches Kommunizieren umfasst das *Rezipieren*, *Produzieren* und *Diskutieren* fachlicher Bearbeitungen“ (MSB NRW, 2023, S. 14; Hervorh. i.O.).

Diese letzteren Kompetenzbereiche werden insbesondere bei den in der Aufgabenstellung in den Portfolios geforderten Erklärungen und Reflexionen zu den Aufgaben abgerufen. Darüber hinaus werden aber auch noch fächerübergreifende Reflexionen erwartet, die darüber hinausgehen (vgl. die Aufgabenstellung der Portfolios in den Online-Supplements 1 und 2).

Inhaltsfelder

Bezüglich der Gegenstände unterscheidet sich das Curriculum besonders im ersten Kurs der Kurssequenz von den im KLP formulierten drei *Inhaltsfeldern*: Funktionen und Analysis (A), Analytische Geometrie und Algebra (G) und Stochastik (S) (MSB NRW, 2023, S. 15), weil in der 12.1 eher Mathematik aus dem Grundstudium eine Rolle spielt: Abstrakte Algebra, Gruppentheorie, Gruppenisomorphismus etc. sind in NRW nicht (mehr?) im Lehrplan Mathematik der Oberstufe verankert. Im zweiten Kurs (12.2) sind Parallelen deutlicher zu sehen; hier sind Elemente vom Inhaltsfeld (G) verortet: Es wird der Raum koordinatisiert, der Vektorbegriff wird eingeführt, und die abstrakt algebraisch formulierten Decktransformationen aus dem ersten Kurs werden als Dreh- und Spiegelmatrizen operationalisiert.

Kompetenzerwartungen

Die oben formulierten prozessorientierten Kompetenzen müssen an konkreten Inhalten angewendet werden. Hiermit ist „prinzipiell jede Verknüpfung von fachlichen Prozessen und fachlichen Gegenständen gemeint“ (MSB NRW, 2023, S. 16). Im Absatz 2.2. des Kernlehrplans werden die prozessbezogenen Kompetenzen kleinschrittig formuliert und in Absatz 2.4. auf die Inhaltsfelder für die Grundkurse in der Qualifikationsphase konkret heruntergebrochen (MSB NRW, 2023, S. 17–21, 24–26).

Die in den oben dokumentierten Kompetenzleitfäden für die Kurssequenz „Faszination der Symmetrie“ implizit enthaltenen Kompetenzerwartungen sind gut anschlussfähig an die im Kernlehrplan formulierten. Sie sind zwar nicht gleichartig – weil zum Teil an andere Inhaltsfelder angeknüpft –, jedoch gleichwertig, wie hier wieder exemplarisch an einer Stelle aufgezeigt werden soll:

- Kompetenzleitfaden für den Kurs in 12.1, Punkt 10: „... die vier **Gruppenaxiome verbalisieren** und **formal aufschreiben**.“ Hier geht es um das Übersetzen symbolischer und formaler Sprache in natürliche Sprachen und umgekehrt, um die Erläuterung mathematischer Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Kontexten. Erwartet wird in etwa folgende Art von Argumentationen: „*Die Existenz eines neutralen Elements bedeutet, dass es genau ein Element in der Gruppe gibt, das bezüglich der Verknüpfung nichts tut, wie die 0 bei der Addition und die 1 bei der Multiplikation oder die Drehung um 0° (Identität) bei den bekannten Decktransformationsgruppen*“ (vgl. MSB NRW, 2023, S. 18–20).

Darüber hinaus werden im Portfolio Kompetenzen im Sinne einer fächerübergreifenden Reflexion gefordert, die über das hinausgehen, was als Reflexionskompetenzen im KLP formuliert wird.

4 Kursportfolios im Mathematikunterricht: Welche Art von Portfolio, wie wird damit gearbeitet und wie wird es bewertet?

4.1 Kurzer Blick auf die Theorie des Portfolios

Der Begriff Portfolio wird in unterschiedlichen Publikationen nicht immer gleich definiert. Darüber hinaus gibt es Portfolios in vielen verschiedenen Formen. Deshalb hier der Versuch einer kurzen Systematisierung.

Portfolios können sich unterscheiden hinsichtlich

- des Inhalts, des Gebietes, aus dem die Portfolioeinlagen dokumentiert werden,
- der Zeitdauer für die das Portfolio angelegt wird,
- der Bestimmung, was in dem Portfolio dokumentiert werden soll,
- dem Zweck, für den das Portfolio genutzt wird.

Es wird unterschieden zwischen Arbeitsportfolios, Präsentationsportfolios, Prüfungsportfolios, Unterrichtsportfolios.

Was das Portfolio jedoch *nicht* ist:

- ein Kursordner, in den alle Arbeiten und Materialien eingelegt sind,
- ein Lerntagebuch, in dem ausschließlich Berichte und Reflexionen gesammelt sind.

Bei aller Verschiedenheit ist ein Portfolio immer eine Dokumentation der individuellen Lernprozesse der Lernenden und enthält sowohl Arbeitsergebnisse als auch Reflexionstexte. „Die Lernenden dokumentieren ihren Weg in der persönlichen Begegnung mit dem Stoff in Produkten und Reflexionen“ (vgl. Winter, 2010, S. 10–12).

4.2 Umsetzung im Kurs

Hier ist ein Portfolio speziell für die Arbeit im Mathematikunterricht in einem fächerübergreifenden Profil beschrieben. Nach der oben beschriebenen Systematik ist es als ein Unterrichtsportfolio zu verstehen, das über ein Halbjahr den Lernprozess der Lernenden begleitet. Die pädagogische Kernidee lautet: „Jede/r Lernende soll einen persönlichen Dialog mit der Sache aufnehmen und in der Auseinandersetzung mit ihr einen eigenen Weg gehen können.“ Dieser Prozess wurde von mir als Lehrperson begleitet. Die einzelnen Lernenden bekamen individuelle Beratung und Unterstützung. Im Kursverlauf handelte es sich um einen phasenweisen Wechsel von Portfoliounterricht und Lehrgangsunterricht (vgl. Volkwein, 2010a, S. 43).

4.3 Leistungsbewertung in fächerübergreifenden Kontexten

Mit der Entwicklung fächerübergreifenden Unterrichts stellt sich nicht nur die Frage nach geeigneten fächerintegrierenden Themen, die für die Ausarbeitung der Curricula zu beantworten ist, sondern auch die Leistungsbewertung muss an diese besonderen Lernarrangements angepasst werden (vgl. Hofmann et al., 2014, S. 71).

Insbesondere in der Oberstufe stellt die Bewertung von solchen Leistungen dann eine große Herausforderung dar, wenn die dafür benötigten Kompetenzen über die Sichtweise des einzelnen Fachs (hier Mathematik) hinausgehen.

Von den drei fächerübergreifenden Kompetenzen, die bei Hahn (2008) formuliert werden, spielt für das hier dokumentierte Portfolio die *Reflexionskompetenz* eine zentrale Rolle. Hahn unterscheidet vier Abstufungen, die hier auf das konkrete Beispiel bezogen werden.

Stufe 0:	Alltagsbetrachtung des Problems
Stufe 1:	Perspektivübernahme: fachspezifische Betrachtung eines Problems: hier Mathematik Hier: Was sagen die Philosophie und die Kunsttheorie und -praxis zu der Frage?
Stufe 2:	Perspektivdifferenzierung: Wechsel von Perspektiven auf das Problem
Stufe 3:	Perspektivenintegration: Reflexion von Leistungen, Grenzen und Verbindungsstellen fachlicher Perspektiven (Mathematik, Kunst und Philosophie)

(vgl. Hofmann et al., 2014, S. 77)

Heruntergebrochen auf das *Phänomen Symmetrie* würden unter der Stufe 0 ganz schlichte Aussagen zu verstehen sein wie z.B.: „*Menschen finden Symmetrie schön und faszinierend und das schon seit alters her*“.

Reflexionen wie diese würden eher schon zur Stufe 1 passen: „*Die Mathematik beschreibt und klassifiziert Symmetrie*“.

Für die Stufe 2 (Vergleich von zwei Fachperspektiven) könnten Aussagen stehen wie: „*Die Mathematik beantwortet nicht die Frage nach der Schönheit von Symmetrie, sondern die nach Strukturen. Die Philosophie mit Theorien zur Ästhetik nähert sich der Frage ‚Was ist schön?‘ an und zwar in folgender Art und Weise ...*“.

Für die Stufe 3 verzichte ich hier auf kurze Beispielaussagen. Hier müsste schon eine Argumentation mit ersten wissenschaftstheoretischen Überlegungen stehen. Diese Kompetenzstufe zu erreichen, ist von Lernenden in der Jahrgangsstufe 12, die zum ersten Mal mit fächerübergreifenden Anforderungen konfrontiert werden, eher nicht zu erwarten (vgl. Hofmann et al., 2014, S. 78).

4.4 Zweck und Nutzen der Portfolioarbeit

In den mündlichen Abitur-Grundkursprüfungen in Mathematik, die in der Ausbildungs- und Prüfungsordnung für das Oberstufen-Kolleg als sogenannte *Portfolioprüfungen*⁸ festgelegt sind, fällt immer wieder auf, dass viele Prüflinge nur bedingt bzw. nicht hinreichend die Kompetenz zur inhaltlichen und methodischen Reflexion ihrer Arbeiten besitzen. Insbesondere sind viele nicht „sprechfähig“, wenn es um Mathematik geht: „Was tue ich hier eigentlich? (Inhalte) Warum mache ich es so und nicht anders? (Methoden) Wie hängt das eine mit dem anderen zusammen? Was sind zentralen Fachbegriffe, die hier eine Rolle spielen?“ Auch die oben beschriebenen fächerübergreifenden Kompetenzen sind hier gefordert.

Das hier beschriebene Kursportfolio, bei dem Erklärungen und Reflexionen dessen, was man tut, einen ganz zentralen Stellenwert haben und die auch in der Bewertung sehr hoch eingestuft sind, zwingt die Lernenden zu einer sprachlich aktiveren Arbeitsweise, als wenn sie „nur“ Übungsaufgaben rechnen müssen. Allerdings gibt es Lernende, die

⁸ Die Portfolioprüfung ist am Oberstufen-Kolleg die vierte Abiturprüfung und hat den Stellenwert einer mündlichen Grundkursprüfung. Anders als in der APO-GOST ist die mündliche Prüfung hier eine „Portfolioprüfung“ auf der Basis des Ausbildungsportfolios der Kollegiat*innen: „Die Portfolioprüfung knüpft als mündliche Prüfung an die im Portfolio repräsentierten Grundkurse eines Aufgabenfeldes an, ...“ (APO-OS, 2023, § 41 Abs. 1). In einem ersten Teil dieser Prüfung müssen die Prüflinge einen ihrer Leistungsnachweise darstellen und inhaltlich/methodisch reflektieren. Geprüft werden explizit auch die fächerübergreifenden Kompetenzen der Prüflinge. „Die Prüfung erstreckt sich auf Prinzipien, Probleme und Verfahren der Wissenschaften, interdisziplinäre Arbeit und den Vergleich unterschiedlicher Erkenntnisverfahren“ (APO-OS, 2023, § 41 Abs. 2).

sich schlichtweg weigern, im Mathematikunterricht in größerem Umfang Texte zu produzieren – aber dazu später mehr.

Wichtig ist, dass es im Unterricht nicht nur Input zum Lösen der Aufgaben gibt, sondern auch zur Einordnung in das jeweilige Fachgebiet, und dass der fächerübergreifende Bezug immer wieder thematisiert wird (siehe Kap. 5 zur didaktischen Arbeit mit dem Portfolio).

5 Didaktisches und Methodisches zu der Aufgabenstellung der beiden Portfolios

5.1 Aufgabenstellung

Die Aufgaben der beiden Kursportfolios decken im Wesentlichen chronologisch die in den Kursen zu erwerbenden Kompetenzen (siehe Kap. 3) ab und spiegeln somit die Progression im Curriculum der Kurssequenz. Für die letzte Aufgabe des Portfolios aus der 12.2 „Konstruktion eines fünfeckigen Gartenhäuschens“ wird ein Großteil der Kompetenzen gebraucht, die im Abitur⁹ als Prüfungsvoraussetzungen für die Kurssequenz „Faszination der Symmetrie“ angegeben werden.

Beide Portfolios enthalten insgesamt elf Aufgaben. Einige davon gliedern sich noch in Unteraufgaben. Die erste Seite der Aufgabenstellung informiert die Lernenden über die Leistungserwartungen und die Bewertungskriterien (Prozessbewertung und Produktbewertung). Dort stehen auch zentrale Reflexionsfragen für die Gesamtreflexion. Diese können von den Lernenden noch durch eigene Fragen ergänzt werden.

Es wird transparent dargestellt, dass nicht nur eine bestimmte Qualität der Bearbeitung der mathematischen Aufgaben in inhaltlicher und methodischer Hinsicht, sondern auch ausführliche Erklärungen und umfangreiche Reflexionstexte erwartet werden. Formal handelt es sich um eine Hausarbeit, die an einem bestimmten Stichtag, ein paar Wochen vor Kursende, eingereicht werden muss.

Hier noch eine Bemerkung zu den Abbildungen in den Portfolios: Aus urheberrechtlichen Gründen musste ich für diese Publikation leider viele wunderbare Ornamente und Bilder, die ich im Unterricht gern verwendet habe, wie zum Beispiel die arabischen Flechtsternornamente aus der Alhambra oder die berühmten Pflasterungen des Grafikers M.C. Escher, durch selbst gemalte Ornamente und cc-lizenzierte Bilder aus dem Netz ersetzen (vgl. Online-Supplements 1 und 2).

5.2 Bewertung

Der oben beschriebenen Aufgabenstellung gemäß kann man mit der reinen Bearbeitung der Aufgaben plus den Erklärungen „nur“ knapp zwei Drittel der maximalen Punktzahl erreichen (66 von 100 Punkten). Trotz der durchaus unterschiedlichen Komplexität der Aufgaben werden die elf Aufgaben alle maximal mit sechs Punkten bewertet: vier für die reine Aufgabenbearbeitung plus zwei für die erklärenden Texte.

Die Lern- und Leistungsreflexion, die inhaltliche und methodische Reflexion und die Einordnung in den Kurs- und Profilverständnis machen weitere 15 Prozent aus. Der Rest (19 von 100 Punkten) teilt sich folgendermaßen auf: Beurteilung der sprachlichen Leistung der erklärenden und reflektierenden Texte sowie formale Gütekriterien zur Bewertung des Portfolios als eine Hausarbeit und zu einem geringen Teil Prozessbewertung der Arbeit im Kurs.

Die ungewöhnliche Gewichtung der Leistungsbewertung ist zur Stärkung der Argumentations- und Reflexionskompetenzen bewusst so gewählt und den Lernenden transparent kommuniziert.

⁹ In einer tabellarischen Übersicht müssen die Prüfungsvoraussetzungen dargelegt und dabei ausreichend viele Bezüge zu Kernkompetenzen des Kernlehrplans Mathematik hergestellt werden (gilt analog für alle Grundkursprüfungen am Oberstufen-Kolleg).

Regelung zum Kursbestehen: Ein hinreichend gutes Portfolio kann eine schlechte Kursklausur ausgleichen (vgl. Online-Supplement 3).

5.3 Arbeit mit dem Portfolio im Kurs

Die Portfolio-Aufgabenstellung wurde jeweils im Laufe der ersten Kurswochen verteilt und auch auf der Lernplattform hochgeladen. Zusammen mit dem jeweiligen Kompetenzleitfaden konnten die Kollegiat*innen dann schon mal „reinschnuppern“, was sie im Kurs erwartet.

Die mathematischen Hintergründe zu den Themen wurden teilweise in klassischem Lehrgangsunterricht oder auch mit Hilfe von Arbeitsblättern (vgl. Online-Supplements 4, 5 und 6) in unterschiedlichen Sozialformen, z.B. Einzelarbeit oder Gruppenarbeit, erarbeitet.

Im Konzept des Oberstufen-Kollegs gibt es nur Kurssitzungen von anderthalb Stunden, sogenannte „Blöcke“. Im Verlauf der Kurse gab es viele Blöcke, in denen frei am Portfolio gearbeitet werden konnte. Häufig wurden jedoch von mir als Kurslehrender mit einem kurzen Input von 10 bis 15 Minuten in die einzelnen Aufgaben eingeführt, nochmals genau die Aufgabenstellung besprochen und – wenn notwendig – Hinweise gegeben. Ein Beispiel *eines* solchen Inputs finden Sie in Online-Supplement 7. Ich habe angeregt, in kleinen festen Arbeitsgruppen zu arbeiten und zu versuchen, Fragen erst einmal untereinander zu klären und dann erst mich zu fragen. Während dieser Kurssitzungen habe ich die Gruppen reihum betreut.

Die meisten Inputs gab es auch als Präsentationen auf der Lernplattform zum Nachbereiten für diejenigen, die in der betreffenden Kurssitzung zum Beispiel krank waren, oder für Gruppen, die noch an vorherigen Aufgaben saßen. Neben den Inputs zu den einzelnen Aufgaben gab es auch Hilfen für die Reflexionstexte, zum Beispiel Informationen zur Einbettung in die Fachsystematik.

5.4 Genauere Beschreibung der einzelnen Aufgaben

5.4.1 Portfolio 12.1 (vgl. Online-Supplement 1)

Das gesamte Portfolio des ersten Halbjahrs bezieht sich auf endliche Symmetriegruppen. Ausführlich besprochen wurden die zyklischen Gruppen C_n und die Diedergruppen D_n .

In den ersten beiden Aufgaben 1 und 2 geht es um die Analyse der Symmetrie von vorgegebenen Mustern / Ornamenten zu einer speziellen C_n oder D_n . Bei den nächsten beiden Aufgaben (3 und 4) müssen Ornamente nach bestimmten Symmetrievorgaben gezeichnet werden. In Aufgabe 5 müssen die jeweiligen Symmetriegruppen von vorgegebenen Ornamenten bestimmt und die Verknüpfungstabellen dazu aufgestellt bzw. ergänzt werden. Ab Aufgabe 6 wird es abstrakter: In Aufgabe 6 muss der Begriff der Symmetriegruppe inklusive der Gruppenaxiome erklärt, und in den Aufgaben 7 und 8 müssen die Gruppenaxiome angewendet werden. Dort sind Verknüpfungstabellen von Fantasiegruppen mit Fantasieverknüpfungen gegeben. Hier ist mit Hilfe der Gruppenaxiome zu prüfen, ob es sich tatsächlich um Gruppen handelt.

Bei den Aufgaben 9 und 10 müssen die Lernenden den Begriff des Gruppenisomorphismus verstanden haben und anwenden können.

Bei der letzten Aufgabe 11 ist zu argumentieren, dass die vierelementige Gruppe D_2 nur aus der Identität, zwei Spiegelungen und einer Drehung um 180° besteht.

5.4.2 Portfolio 12.2 (vgl. Online-Supplement 2)

Der erste Teil der Aufgaben bezieht sich auf zwei Arten unendlicher Symmetriegruppen: Bandornamentgruppen und Wallpaper-Groups. Die Hilfsmittel zur Bearbeitung waren ein Arbeitsblatt zur Erklärung der Nomenklatur der „International Union of Crystallography“ (IUCr; vgl. Online-Supplement 4), ein Musterblatt für die 17 Wallpapergroups

(vgl. Online-Supplement 5) und ein Flussdiagramm (vgl. Online-Supplement 6). Wie schon im Portfolio 12.1 wird auch hier gefordert, Muster auf ihre Symmetrie hin zu untersuchen und sie danach begründet den passenden Symmetriegruppen zuzuordnen (Aufgaben 2, 3, 5 und 6). Ferner gibt es wieder kreative Aufgaben zur praktischen Ornamentik (Aufgaben 1 und 4).

Die Ergebnisse von Aufgabe 1 wurden im Kurs präsentiert, und die beste Realisierung der sieben Bandornamente wurde prämiert (erster Preis: ein Posterdruck von M.C. Escher).

Hintergrund des zweiten Teils des Portfolios ist der mathematische Schwerpunkt des zweiten Halbjahres der Kurssequenz, d.h. die mathematischen Werkzeuge zum numerischen Rechnen¹⁰ mit Decktransformationen: Vektoren als Translationsvektoren und Abbildungsmatrizen für Drehungen und Spiegelungen im \mathbb{R}^2 . Der zweite Teil des Portfolios enthält daher einen anderen Typus von Aufgaben.

Unterrichtlicher Hintergrund: Zunächst wurde im Kurs der Begriff des Vektors eingeführt und zwar gleich mit der Interpretation als Translationsvektor, was durch die vorherige Beschäftigung mit den Band- und Flächenornamentengruppen nahe liegt (Aufgaben 7 und 8). Vor der Einführung von Matrizen, genauer Abbildungsmatrizen brauchte es eine Wiederholung zur Definition von Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck aus der Sekundarstufe 1 – hier ist die Erinnerung bei den Lernenden oft nahezu nicht vorhanden – und eine Einführung zu den trigonometrischen Funktionen, fokussiert auf Sinus und Kosinus. Die Aufgabe 9 des Portfolios bezieht sich genau darauf.

Die beiden letzten Aufgaben 10 und 11 schließen wieder den Kreis und kommen thematisch auf die Symmetriegruppen des ersten Kurshalbjahrs zurück. Sie beschäftigen sich mit der Anwendung des Werkzeugs *Abbildungsmatrix* auf die Theorie der endlichen Symmetriegruppen der Ebene: die zyklischen Gruppen und die Diedergruppen (C_n und D_n). Bei der Aufgabe 10 soll die Gruppe D_6 in Matrizendarstellung aufgeschrieben werden und an einem Beispiel eine Matrizenmultiplikation explizit durchgeführt werden. Dabei soll erkannt werden, dass die Multiplikation von zwei Abbildungsmatrizen der Hintereinanderausführung der entsprechenden Decktransformationen entspricht. Abstrakter ausgedrückt: Die Gruppe $D_6 = (\{\text{id}, d_{60^\circ}, d_{120^\circ}, d_{180^\circ}, d_{240^\circ}, d_{300^\circ}, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}, \circ)$ – als Decktransformationsgruppe mit der Verknüpfung „ \circ “ – ist isomorph zur Gruppe mit den entsprechenden Dreh- und Spiegelmatrizen zusammen mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

Bei der Aufgabe 11 geht es um die Konstruktionszeichnung eines regelmäßigen, fünfeckigen Gartenhäuschens. Hier sollen mithilfe der entsprechenden Drehmatrizen durch Multiplikation mit dem Ortsvektor zu einem ersten, vorgegebenen Eckpunkt die weiteren vier Eckpunkte des Häuschens bestimmt und in ein Koordinatenkreuz eingezeichnet werden.

6 Auswertung der Erfahrungen: Gelungenes und Schwieriges

Dieser Bericht blickt auf sieben Jahre systematischer Arbeit mit dem Portfolio im Mathematikunterricht der Kurssequenz „Faszination der Symmetrie“ zurück (Schuljahr 2016/2017 bis Schuljahr 2022/2023).

Grundsätzliche Erfahrung war: Die Arbeit im Kurs an den Portfolioaufgaben wird gut angenommen, was sich in den Lern- und Leistungsreflexionen der Kollegiat*innen auch widerspiegelt. Es gibt eine Einschränkung: Es muss genügend Kurszeit zur selbstständigen Bearbeitung der Aufgaben zur Verfügung stehen. Erst dann kann die Arbeit mit dem Portfolio das einlösen, was intendiert ist: die selbstständige Beschäftigung mit dem Thema oder, anders gesagt, die selbstständige Aneignung des Themas.

¹⁰ Das „Rechnen mit Zahlen“ wird erfahrungsgemäß von vielen Kursteilnehmer*innen regelrecht *ersehnt* nach der abstrakten, algebraischen Mathematik im ersten Kurshalbjahr: „*Endlich dürfen wir wieder richtig rechnen*“.

Ein Problem stellt diesbezüglich das kurze Sommerhalbjahr dar, das wegen der vielen Feiertage, Abiturprüfungen, Langklausuren in den Studienfächern manchmal extrem verkürzt ist. Durch einen frühzeitigen Beginn der Sommerferien verschärft sich dies. Im Sommer 2023 war genau dies der Fall: Es standen viel weniger Kurssitzungen zur Verfügung, als auf dem Kalender standen, die abiturrelevanten Inhalte mussten aber unterrichtet werden. Dadurch blieb für die Portfolioarbeit anders als im ersten Halbjahr zu wenig Zeit übrig. Der Lehrgangsunterricht dominierte. Und während die Kollegiat*innen in ihrer Lern- und Leistungsreflexion im Rahmen des Portfolios von 12.1 überwiegend positive Rückmeldung zu dem Format geäußert hatten: *„Ich fand es gut, in Ruhe an den Aufgaben arbeiten zu können“*, *„[...] für mich war das eine gute Vorbereitung zur Klausur“*, fielen die Rückmeldungen zum Portfolio der 12.2 bei den meisten kritischer aus: *„Wir hatten diesmal viel zu wenig Zeit in der Unterrichtszeit am Portfolio zu arbeiten“*.

Wichtig sind also eine sorgfältige gute Betreuung und Beratung durch die Kurslehrenden und – eine gute Zeitplanung. Die Möglichkeiten einer anderen Stoffverteilung sind jedoch begrenzt, weil es sich um eine zweisemestrige Kurssequenz in der Qualifikationsphase handelt, die aber mit der 12.2 zu Ende ist. In der Jahrgangsstufe 13 beginnt im Profil „schönes machen – schönes denken“ eine neue Mathematik-Sequenz unter dem Titel „Differentialrechnung und komplexe Zahlen“. Es gibt zwar punktuell Bezüge zu der Sequenz in der Jahrgangsstufe 12. Grundsätzlich hat sie aber ein anderes, eigenes Curriculum.

Durch die Verteilung der Portfolios schon zu Beginn des Kurses fühlen sich die Lernenden ernst genommen. Die Möglichkeit, das Portfolio samt aller erklärenden Materialien auf der Lernplattform jederzeit ansehen zu können, konnten diejenigen nutzen, die – aus welchen Gründen auch immer – Unterricht verpasst hatten.

6.1 Leistungsheterogenität

In allen Kursgruppen war immer eine große Heterogenität wahrzunehmen, was zunächst

- die Fähigkeit der Arbeit in einer Kleingruppe,
- die Konzentration und Fokussierung auf die Aufgaben,
- die Kompetenz des selbstständigen Lernens

angeht. In der Folge ergab sich daraus immer auch eine hohe Heterogenität bezüglich der fächerübergreifenden Kompetenzen.

6.2 Der Prozess

Es gab in jedem Kurs Kleingruppen, die sehr produktiv zusammenarbeiteten und sich vieles untereinander erklären konnten, die immer, wenn ich zu ihnen kam, wussten, wo sie stehen und was ihnen noch fehlt. Ebenso gab es Gruppen, die überhaupt nicht zusammenarbeiteten, sondern nach meinem Eindruck nur räumlich zusammensaßen. Außerdem gab es immer Kollegiat*innen, die sich keiner Gruppe anschlossen, sondern auf jeden Fall allein arbeiten wollten. Auch die „Einzelkämpfer*innen“ waren sehr unterschiedlich erfolgreich. Manche waren sehr selbstständig, andere musste ich sehr eng betreuen, manche entzogen sich auch meiner Beratung.

6.3 Das Produkt

Große Heterogenität gab es auch bei der Ausarbeitung des Portfolios als Hausarbeit:

- Leistungsunterschiede in der Reflexionsfähigkeit. (insbesondere in der Frage nach dem Bezug zu den anderen fächerübergreifenden Kursen im Profil),

- Verweigerung, für den Mathematikkurs überhaupt Texte¹¹ zu schreiben,
- Arbeitsökonomie: Workload Klausur vs. Portfolio,
- Kreativität in der Darstellung der Lösungen der Aufgaben und bei den Erklärungen,
- Sorgfalt in Form und Inhalt.

6.4 Wie reagiert die Portfolioarbeit auf diese Heterogenität?

Die Arbeit mit den Portfolios bietet einen Rahmen für verschiedene Formen der inneren Differenzierung. Die Phasen des Portfoliounterrichts eröffnen Spielräume für selbstständiges Lernen und für die ganz persönliche Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand. Dabei liegt der Fokus bei der hier beschriebenen Portfolioarbeit weniger auf einer individuellen Interessen- und Themendifferenzierung, sondern auf einer Differenzierung der Arbeitsorganisation, der Rhythmisierung des Arbeitsprozesses sowie der Gestaltung des Produktes. Die Planungs-, Steuerungs- und Reflexionskompetenzen der Kollegiat*innen werden dabei gefördert. Präsentationen von Zwischenergebnissen vor den anderen im Kurs sind systematisch eingeplant (vgl. Volkwein, 2010b, S. 133ff.).

Da die Form der Darstellung der Arbeitsergebnisse, der erklärenden und beschreibenden Texte zu den Aufgaben und der Reflexionen nicht vorgegeben ist, gibt es Freiräume für Kreativität. Manche gestalten ihr Portfolio geradezu künstlerisch. Da das Portfolio letztendlich als Hausarbeit abgegeben wird, kann die Ausgestaltung des Portfolios sowohl im Unterricht als auch zuhause, sozusagen als „Finish“, stattfinden.

Die individuelle Arbeit der Lernenden wird durch regelmäßige Rückmeldungen und Beratungsgespräche begleitet. Die im Unterricht gegebenen Inputs zur Bewältigung der Aufgaben, werden gegebenenfalls individuell angepasst. Phasen der Einzel- und Gruppenarbeit wechseln sich ab. Peerberatung spielt ebenso eine Rolle wie die Beratung durch mich als Lehrende.

Eine andere durchaus intendierte, nicht von der Lehrkraft gesteuerte Differenzierung ist der unterschiedliche Workload, den die Lernenden in die Arbeit mit dem Portfolio einbringen. Gerade diejenigen, die bei Klausuren unsicher sind und Versagensängste haben, stecken oft viel Arbeit in das eigene Portfolio. Demgegenüber gibt es immer Kollegiat*innen, die sich lieber anderthalb Stunden bei der Klausur anstrengen wollen, beim Portfolio jedoch nur das Nötigste machen, um es gerade zu bestehen. Das ist legitim, wenn auch unter Umständen riskant – wer dann durch die Klausur fällt, setzt möglicherweise sein Kursbestehen aufs Spiel.

In den meisten Portfolios zeigte sich eine eher niedrige Stufe der Reflexionskompetenz im Sinne der Klassifikation von Hahn (siehe oben). Die letzten drei Reflexionsfragen auf der ersten Seite der Aufgabenstellung des Portfolios beider Semester sind folgende:

1. Was kann die Mathematik überhaupt zum Thema Symmetrie beitragen?
2. Zu welchen Fragen bezüglich Symmetrie kann die Mathematik auch nichts beitragen?
3. Was haben diese Aufgaben mit dem ProfiltHEMA „schönes machen – schönes denken“ zu tun? Stelle Bezüge zu den anderen beiden Kursen her.

Diese Fragen wurden in den vielen Kursen, in denen ich mit dem Portfolio gearbeitet habe, von einigen Lernenden gar nicht, von vielen sehr schlicht und von den wenigsten differenziert beantwortet. Jedoch gab es in allen Kursen auch einige wenige Lernende, die diese Reflexionen selbstständig und auf hohem Niveau für sich formulieren konnten.

¹¹ Vor einigen Jahren habe ich dieses Zitat zu hören bekommen: „Der Mathelehrer in meiner alten Schule hat gesagt, Mathematiker seien faul, die würden immer nur das Nötigste aufschreiben“.

7 Ausblick

Was könnte man besser machen?

Das hier beschriebene Portfolio ermöglicht individuellen Spielraum hauptsächlich in der Frage des Lösungsweges und der Beschreibungen. Mehr *Innere Differenzierung* wäre durch fakultative Aufgaben möglich. Ein Angebot an Aufgaben, aus denen die Lernenden je nach Interesse auswählen können – eigentlich ein Charakteristikum der Portfolioarbeit –, könnte den Lernenden mehr Autonomie über ihren eigenen Lernprozess geben.

Zur Förderung der fächerübergreifenden Kompetenzen ist eine Teamarbeit der Lehrenden der drei fachlichen Schwerpunkte sehr wichtig. Diese mündet idealerweise in gemeinsame Module im Profil (d.h. kleine, zeitlich begrenzte Unterrichtsprojekte) oder gemeinsame Exkursionen. In den vergangenen Jahren gab es zweimal eine Exkursion zur Documenta nach Kassel und mehrmals zu speziellen Ausstellungen im LWL-Museum für Kunst und Kultur in Münster.¹² Im Rahmen dieser Museumsbesuche, an denen in der Regel alle im Profil unterrichtenden Lehrenden teilnahmen, gab es fruchtbare Diskussionen über den unterschiedlichen Blick, mit dem die verschiedenen Disziplinen Kunst, Philosophie und Mathematik auf eine Kunstaussstellung wie z.B. bei der Documenta schauen.

In der Zeit der Corona-Pandemie waren solche Lerngelegenheiten leider gar nicht oder nur sehr eingeschränkt möglich, was meiner Erfahrung nach tatsächlich auch Auswirkungen auf die Qualität der Reflexionen im Portfolio hatte. Diese Erfahrung unterstreicht die Bedeutung von fächerübergreifenden Unterrichtsprojekten und Exkursionen mit Lehrenden aus den unterschiedlichen fachlichen Schwerpunkten.

Zum Abschluss möchte ich sehr dazu ermuntern, im Mathematikunterricht mit Kursportfolios zu experimentieren, unabhängig davon, welches mathematische Teilgebiet Thema ist. Auch in einer anderen Kurssequenz habe ich erfolgreich mit einem Kursportfolio gearbeitet: Die fächerübergreifende Mathematiksequenz zum Thema „Wachstum“ behandelte verschiedene Wachstumsmodelle (lineares, exponentielles, beschränktes und logistisches Wachstum). Das Portfolio enthielt Anwendungsaufgaben, vor allem aus der Biologie, Medizin und Physik. Die Bewertungskriterien waren vergleichbar mit den hier ausgeführten. Auch in diesen Kursen war die Förderung der Reflexions-, Urteils- und Verständigungskompetenz mithilfe der Portfolioarbeit ein wichtiger Baustein zur Vorbereitung der Kollegiat*innen auf die (mündlichen) Abiturprüfungen.

Literatur und Internetquellen

- APO-GOST. (2023). *Verordnung über den Bildungsgang und die Abiturprüfung in der gymnasialen Oberstufe. Vom 5. Oktober 1998, zuletzt geändert durch Verordnung vom 20. März 2023*. <https://bass.schul-welt.de/9607.htm>
- APO-OS. (2023). *Verordnung über die Ausbildung und Prüfung am Oberstufen-Kolleg an der Universität Bielefeld. Runderlass vom 26. Juni 2002 i.d.F. vom 20. März 2023*. <https://bass.schul-welt.de/4672.htm>
- Dress, A. (1986). Repetition und Metamorphose – zum Symmetriebegriff in der Mathematik. In B. Krimmel (Hrsg.), *Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft, Band 1: Texte*. Katalog zum Symposium, Mathildenhöhe Darmstadt, 1. Juni–24. August 1986 (S. 83–106). Mathildenhöhe.
- Eckpunkte für die Weiterbildung der gymnasialen Oberstufe in Nordrhein-Westfalen*. (2024, 29.05.). MSB NRW. <https://www.schulministerium.nrw/29052024-eckpunkte-fuer-die-weiterentwicklung-der-gymnasialen-oberstufe-nordrhein-westfalen>

¹² LWL: Landschaftsverband Westfalen-Lippe.

- Hahn, S. (2008). Wissenschaftspropädeutik: Der „kompetente“ Umgang mit Fachperspektiven. In J. Keuffer & M. Kublitz-Kramer (Hrsg.), *Was braucht die Oberstufe? Diagnose, Förderung und selbstständiges Lernen* (S. 157–168). Beltz.
- Hofmann, T., Fiedler-Ebke, W., Matteo Ferrer, M. & Döring, T. (2014). Leistungsnachweise in fächerübergreifenden Kontexten. In S. Hahn, M. Heinrich & G. Klewin (Hrsg.), *Studien zum Fächerübergreifenden Unterricht. Forschungs- und Entwicklungsprojekte des Oberstufen-Kollegs aus den Jahren 2012–2014* (S. 71–138). Monsenstein und Vannerdat.
- Keymer, S., Lau, R. & Willberg, T. (2024). Leitgedanken für den fächerübergreifenden Unterricht in der Oberstufe. Grundsätze und Begründungen zu fächerübergreifend-thematisch orientierten Kurskonzepten. *WE_OS-Jb – Jahrbuch der Wissenschaftlichen Einrichtung Oberstufen-Kolleg*, 7, 28–39. https://doi.org/10.11576/we_os-7713
- MSB NRW (Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen) (Hrsg.). (2023). *Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium / Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen – Mathematik*. <https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/lehrplannavigators-ii/gymnasiale-oberstufe/mathematik/index.html>
- Volkwein, K. (2010a). Der Portfoliounterricht – Konturen einer neuen Unterrichtsform. In C. Biermann & K. Volkwein (Hrsg.) *Portfolio-Perspektiven. Schule und Unterricht mit Portfolios gestalten* (S. 39–51). Beltz.
- Volkwein, K. (2010b). Portfolio. In S. Boller & R. Lau (Hrsg.), *Innere Differenzierung in der Sekundarstufe II* (S. 133–147). Beltz.
- Winter, F. (2010). Perspektiven der Portfolioarbeit für die Gestaltung des schulischen Lernens. In C. Biermann & K. Volkwein (Hrsg.), *Portfolio-Perspektiven* (S. 10–29). Beltz.

Beitragsinformationen

Zitationshinweis:

Kemper, A. (2024). Zur didaktischen Grundlegung und Konzeption der Portfolioarbeit im fächerübergreifenden Mathematikunterricht am Oberstufen-Kolleg. Eine erfahrungsgesättigte Dokumentation für Lehrkräfte zum „Nacherfinden“. *WE_OS-Jb – Jahrbuch der Wissenschaftlichen Einrichtung Oberstufen-Kolleg*, 7, 40–56. https://doi.org/10.11576/we_os-7698

Online-Supplements:

- 1) Aufgabenstellung des Portfolios 12.1
- 2) Aufgabenstellung des Portfolios 12.2
- 3) Bewertungsbogen für die beiden Portfolios
- 4) Arbeitsblatt zur IUCr-Bezeichnung der Bandornamentgruppen
- 5) Musterblatt der 17 Wallpapergroups
- 6) Flussdiagramm zur Zuordnung zu den Wallpapergroups nach der IUCr-Bezeichnung
- 7) Beispiel für einen Input: hier Hilfe zur Aufgabe 4 des Portfolios 12.2

Online verfügbar: 23.12.2024

ISSN: 2627-4450



Dieser Artikel ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/legalcode.de>